球面内の等径超曲面と運動量写像について (部分多様体論とその周辺領域における新たな研究対象)

藤井, 忍

数理解析研究所講究録
第 1668 巻 2009 年 80-86

球面内の等径超曲面と運動量写像について*

(On isoparametric hypersurfaces in spheres and moment maps)

広島大学大学院理学研究科数学専攻　藤井　忍† (FUJII, Shinobu)
Department of Mathematics,
Hiroshima University

概要

本稿では, 4 つの主曲率をもつ球面内の等質等径超曲面を定義する等径関数と, コンパクトで既約な階数 2 の古典型 Hermite 対称空間の等方表現に付随する運動量写像の関係について述べる. また, FKM 型等径超曲面と運動量写像の関係についての現時点での研究結果を報告する.

1 球面内の等径超曲面

本節では, 球面内の等径超曲面について簡単に説明する.

Riemann 多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の超曲面が**等径超曲面**であるとは, M 上の等径関数 $\varphi : M \to \mathbb{R}$ のレベル集合として定義されることをいう. ここで M 上のなめらかな関数 $\varphi : M \to \mathbb{R}$ が**等径関数**であるとは, 以下をみたすなめらかな一変数関数 $A(t)$, $B(t)$ が存在するときをいう:

$$\begin{cases} \|\mathrm{grad}\,\varphi\|^2 = \langle \mathrm{grad}\,\varphi, \mathrm{grad}\,\varphi \rangle = A \circ \varphi, \\ \qquad \Delta\varphi = B \circ \varphi. \end{cases}$$

等径超曲面に関する歴史や基本的性質等については尾関–高木–竹内 [10] や宮岡 [7] 等を参照していただきたい.

以下では, 球面 $\mathbb{S}^n$ 内の等径超曲面を考えることにし, この後で必要なことについて簡単にまとめる.

球面内の超曲面が等径超曲面であることと, 主曲率一定であることは同値であることが知られている. 球面内の等質超曲面は主曲率一定なので, 球面内の超曲面に関して "等質 $\Rightarrow$ 等径" が成り立つ. 球面内の等質超曲面は分類済であり, それらは適当な階数 2 の対称

* RIMS 研究集会「部分多様体論とその周辺領域における新たな研究対象」, 数理解析研究所講究録用原稿.
† E-mail address: shinofu@hiroshima-u.ac.jp

空間の等方表現の主軌道に一致することが知られている.

球面内の等径超曲面の, 相異なる主曲率の個数を g と表すことにする. $\lambda_1 < \cdots < \lambda_g$ を主曲率とし, それぞれの重複度を $m_1, \ldots, m_g$ とするとき, Münzner は次を示した:

命題 1.1 (Münzner [8], [9]).

(1) $m_i = m_{i+2}$ for $i \bmod g$.

(2) 球面 $\mathbb{S}^n$ 内の等径超曲面を定義する等径関数は, 以下の偏微分方程式系を満たす g 次斉次多項式関数 $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{S}^n$ に制限したもの:

$$\begin{cases} \|\mathrm{grad}\, f(P)\|^2 = g^2\, |P|^{2g-2}, \\ \Delta f(P) = \dfrac{m_2 - m_1}{2} g\, |P|^{g-2}. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の Euclid ノルム. (このような斉次多項式 f を **Cartan–Münzner 多項式**と呼ぶ.)

(3) $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

4 つの主曲率をもつ, 球面内の等径超曲面のうち, 現在知られているものは, 以下に挙げる階数 2 の対称空間の等方表現の主軌道として得られるものと, FKM 型等径超曲面である:

(1) $\mathrm{SO}(2+n)/\,\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n)$,
(2) $\mathrm{SU}(2+n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(n))$,
(3) $\mathrm{SO}(10)/\,\mathrm{U}(5)$,
(4) $\mathrm{E}_6/\,\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Spin}(10)$,
(5) $\mathrm{Sp}(2+n)/\,\mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(n)$,
(6) $\mathrm{SO}(5) \times \mathrm{SO}(5)/\,\mathrm{SO}(5)$.

このうち, (1) から (4) までは Hermite 対称空間である. FKM 型等径超曲面の分類は Cecil–Chi–Jensen [2] と Immervoll [5] によって独立にほぼ完成している.

我々は 4 つの主曲率を持つ, 球面内の等径超曲面に興味を持っている. 特に「4 つの主曲率を持つ球面内の等径超曲面は, 等質か非等質かに依らずに, 全て運動量写像と関係するだろう」と予想をしていて, その研究を行っている. 現在, 上記のリストの (1), (2), (3) の対称空間から得られる等径超曲面については, 運動量写像との関係が分かったので, これを報告する (定理 3.1). また, FKM 型等径超曲面と運動量写像の関係については, 現在, 研究を行っているところであり, これまでに分かったことを報告する (命題 4.1).

2 Hamilton 作用と運動量写像

本節では Hamilton 作用と運動量写像について簡単に復習する. 詳しくは Audin [1] 等を参照していただきたい.

「球面内の等径超曲面と運動量写像の関係」を調べたいのだが, そのためには “良い” 群作用を考えなければならない. その “良い” 群作用が “Hamilton 作用” である.

$2n$ 次元 C^∞–多様体 M と, M 上の微分 2–形式 ω で, $d\omega = 0$ かつ $\omega^{\wedge n} \neq 0$ なるものの組 (M, ω) を**シンプレクティック多様体**といい, ω を M の**シンプレクティック形式**という.

定義 2.1. Lie 群 K のシンプレクティック多様体 (M, ω) への作用が **Hamilton 的**であるとは, 以下を満たすことをいう:

(1) K–作用はシンプレクティック形式 ω を保つ,

(2) 運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ が存在する.

ただし, $\mathfrak{k}^*$ は K の Lie 代数 $\mathfrak{k}$ の線型空間としての双対空間である. ここで写像 $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ が**運動量写像**であるとは,

(1) $(d\mu)_P(Q)(\xi) = \omega_P(\widetilde{\xi}_P, Q)$ for $P \in M$, $Q \in T_P M$, $\xi \in \mathfrak{k}$,

(2) $\mu(a.P) = a.\mu(P)$ for $P \in M$, $a \in K$

を満たすときをいう. ここで $\widetilde{\xi}$ は以下で定義される M 上のベクトル場である:

$$M \ni P \stackrel{\widetilde{\xi}}{\longmapsto} \frac{d}{dt} \exp(t\xi).P \bigg|_{t=0} \in T_P M.$$

運動量写像の性質 (b) は, 運動量写像は K–同変写像であることを意味する.

さて, 我々は等径関数と運動量写像の関係を調べている. 特に運動量写像から等径関数を構成することを考えている. そのためには次のことを実行すればよい:

(1) $\mathbb{R}^{2n}$ への群作用はシンプレクティック形式 ω を保つかを確認,

(2) 運動量写像 μ の計算,

(3) $\|\mu\|^2$ が Cartan–Münzner 多項式になるための条件を求める. ただし, $\|\cdot\|$ は K–不変ノルムである.

この工程で得られる等径関数 $\|\mu\|^2$ の余次元 1 のレベル集合は球面 $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ の, 4 つの主曲率を持つ等径超曲面である. いくつかの群作用に関してはこのことを確認できたので, 次節以降でその結果を紹介したい.

3 Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像

本節では階数 2 の Hermite 対称空間の等方表現と運動量写像の関係について説明する. 以下で述べることは論文 [4] の内容である.

階数 2 の Hermite 対称空間 G/K の等方表現の主 K–軌道が球面 $\mathbb{S}^{2n-1}$ 内の等質等径超曲面となることが知られている. 定義から, この軌道は適当な等径関数 $\varphi : \mathfrak{p} \simeq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ のレベル集合である事が分かっている. ここで $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に現れる $\mathfrak{p}$ である. Münzner の結果によって, この φ は適当な Cartan–Münzner 多項式 $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_{2n}]$ の $\mathbb{S}^{2n-1}$ への制限である事が分かっている. 注目すべきは f が K–不変であることである.

一方で, 階数 2 の Hermite 対称空間 G/K の等方表現が Hamilton 作用であることが知られている. したがって, 運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \to \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ が存在する. 運動量写像は K–同変写像であり, 適当な K–不変ノルム $\|\cdot\|$ との合成を考えることで K–不変関数を得る.

我々はこの二つの K–不変関数の関係について, G/K が古典型の場合に以下の結果を得た:

定理 3.1 (F. [4]). G/K を階数 2 の古典型コンパクト既約 Hermite 対称空間とする. つまり, G/K は次の 3 つのうちのいずれか:

$$\mathrm{SO}(2+n)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(n), \quad \mathrm{SU}(2+n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2)\times\mathrm{U}(n)), \quad \mathrm{SO}(10)/\mathrm{U}(5).$$

このとき,

(1) 等方表現 $K \overset{\mathrm{Ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{p}$ は ω を保つ,

(2) 運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \to \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ は $\mu(P) = (1/2)[P,[P,Z]] \in \mathfrak{k}$ と書ける,

(3) $\|\mu(P)\|^2$ が Cartan–Münzner 多項式になるような $\mathfrak{k}^*$ 上の K–不変ノルム $\|\cdot\|$ が存在する.

ただし, Z は $J := \mathrm{ad}_Z|_{\mathfrak{p}}$ が $\mathfrak{p}$ 上の K–不変複素構造を定めるような $\mathfrak{g}$ の元である. また, $\mathfrak{g}$ の Killing 形式から定まる $\mathfrak{k}^*$ 上の K–不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ によって $\mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$ とみなしている. $\mathfrak{p}$ 上のシンプレクティック形式 ω は $\omega(x,y) := \langle J(x), y\rangle$ で定義する.

(証明の概略) (1) は直接計算から従う. (2) は, $\mu(P) = (1/2)[P,[P,Z]]$ が運動量写像の定義を満たすことを確かめればよい.

(3) G/K は Hermite 対称空間なので, Lie 代数 $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{k}'$ と Lie 代数として分解できる. そこで以下のような図式を考える. ただし $p_1 : \mathfrak{k} \to \mathfrak{u}(1)$, $p_2 : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}'$ はそれぞ

れ第 1 成分, 第 2 成分への自然な射影である:

$$\begin{tikzcd} & & \mathfrak{u}(1) \\ \mathfrak{p} \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k} \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ & & \mathfrak{k}' \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B と実数 a, b に対して

$$aB|_{\mathfrak{u}(1)}(\cdot,\cdot) + bB|_{\mathfrak{k}'}(\cdot,\cdot) \tag{3.1}$$

は $\mathfrak{k}$ 上の内積を定める. 運動量写像 μ の, 上で定めた内積に関するノルム 2 乗関数を

$$\begin{aligned} f_{a,b}(P) &= aB|_{\mathfrak{u}(1)}(\mu(P),\mu(P)) + bB|_{\mathfrak{k}'}(\mu(P),\mu(P)) \\ &= aB(p_1\circ\mu(P), p_1\circ\mu(P)) + bB(p_2\circ\mu(P), p_2\circ\mu(P)) \\ &= aB(\mu_1(P),\mu_1(P)) + bB(\mu_2(P),\mu_2(P)) \\ &= a\,\|\mu_1(P)\|^2 + b\,\|\mu_2(P)\|^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

と定義する. ただし, $\mu_1 := p_1\circ\mu$, $\mu_2 := p_2\circ\mu$ である.

あとは, 各 G/K に対して以下のステップを実行すれば証明が終わる:

(1) 運動量写像 μ の計算,

(2) $f_{a,b}(P)$ の計算,

(3) $\|\mathrm{grad}\, f_{a,b}(P)\|^2$, $\Delta f_{a,b}(P)$ の計算,

(4) $f_{a,b}(P)$ が Cartan–Münzner 多項式になるような (a,b) を求める. □

注意 3.2. 我々が今回計算して得た Cartan–Münzner 多項式は, 尾関–竹内 [12] で計算されているものと本質的には同じものである (違いは $\mathfrak{k}^*$ 上の K–不変内積の取り方と計算方法である).

注意 3.3. 定理 3.1 (2) の運動量写像の記述は, Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像に対して成り立ち, G/K の階数や古典型・例外型といった性質には依らない.

4 FKM 型等径超曲面と運動量写像

本節では, FKM 型等径超曲面と運動量写像の関係について, 現時点で分かっていることを述べる.

FKM 型等径超曲面とは 4 つの主曲率を持つ球面内の等径超曲面のクラスの一つで, これらは Clifford 代数の表現から構成される. Clifford 代数については Lawson–Michelsohn [6] を参照していただきたい. その構成法は尾関–竹内 [11] の方法を Ferus–Karcher–Münzner が拡張したものである ([3]). FKM 型等径超曲面の構成を簡単に言うと, Clifford 代数 Cl_{m-1} の l 次表現から, 次を満たす $2l$ 次実対称行列 $P_0,\ldots,P_m$ を得る:

$$P_i{}^2 = I_{2l} \ \ ({}^{\forall}i), \quad P_iP_j + P_jP_i = \mathbf{0} \ \ (i \neq j).$$

この $P_0,\ldots,P_m$ を用いて $\mathbb{R}^{2l}$ 上の関数 $F:\mathbb{R}^{2l}\to\mathbb{R}$ を

$$F(x) = \langle x, x\rangle^2 - 2\sum_{i=0}^{m} \langle P_i x, x\rangle^2 \ \text{ for } x \in \mathbb{R}^{2l}$$

と定義すると, F は Cartan–Münzner 多項式となる.

このとき, その構成法および Clifford 代数の性質から $\mathbb{R}^{2l}$ に $K = \mathrm{U}(1)\times\mathrm{Spin}(m)$ が作用することが分かる. 我々はこの作用から運動量写像が得られ, その運動量写像から F が得られるのではないか, と考えている. 研究の結果, 現時点で分かっていることを以下にまとめる.

命題 4.1. 上と同じ記号を用いる. $\mathbb{R}^{2l}$ の標準的な Euclid 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ と標準的な複素構造 J を用いて $\omega(x,y) := \langle J(x), y\rangle$ と定義する.

(1) FKM 型等径超曲面を定義する等径関数 F は K–不変,

(2) $K \curvearrowright \mathbb{R}^{2l}$ はシンプレクティック形式 ω を保つ.

さらに, 運動量写像に関する一般論から $K \curvearrowright \mathbb{R}^{2l}$ は Hamilton 作用であり, したがって運動量写像 $\mu:\mathbb{R}^{2l}\to\mathfrak{k}^*$ ($\mathfrak{k}$ は K の Lie 代数) の存在については分かっている.

参考文献

[1] Audin, M, *Torus Actions on Symplectic Manifolds*, Second revised edition, Prog. in Math. **93**, Birkhäuser, 2004.

[2] Cecil, T. E., Chi, Q.-S. and Jensen, G. R., “Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures”, *Ann. of Math.* **165** (2007), 1–76.

[3] Ferus, D., Karcher, H. and Münzner, H. F., “Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen”, *Math. Z.*, **177** (1981), 479–502.

[4] Fujii, S., “Homogeneous isoparametric hypersurfaces in spheres with four distinct principal curvatures and moment maps”, submitted.

[5] Immervoll, S., "On the classification of isoparametric hypersurfaces with four distinct principal curvatures in spheres", *Ann. of Math.* **168** (2008), 1011–1024.

[6] Lawson, Jr., H. B. and Michelsohn, M.-L., *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.

[7] 宮岡 礼子, "等径超曲面再訪", 数学 **53** (2001), 18–33.

[8] Münzner, H. F., "Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I", *Math. Ann.* **251** (1980), 57–71.

[9] ———, "Isoparametrische Hyperflächen in Sphären II", *Math. Ann.* **256** (1981), 215–232.

[10] 尾関 英樹, 高木 亮一, 竹内 勝, "等径超曲面について", 数学 **30** (1978), 23–32.

[11] Ozeki, H. and Takeuchi, M., "On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I", *Tôhoku Math. J.* **27** (1975), 515–559.

[12] ———, "On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres II", *Tôhoku Math. J.* **28** (1976), 7–55.